جامعة البعث	امتحان مقرر التحليل (4)	اسم الطالب :
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية رياضيات	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 / 2016	العلامة : 100

السؤال الأول : (18 علامة)

عرّف متتالية كوشي في فضاء متري ، ثم برهن أن كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي .

السؤال الثاني : (17 علامة)

لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من $\mathbb{R}^n$ ولتكن a نقطة من $\overline{A \cap B}$ ولنفترض وجود النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ $\lim_{x\to a} g(x)$ ، فاثبت أن :

$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

السؤال الثالث : (15 علامة)

ادرس وجود نهاية للدالة f المعرفة بالشكل : $f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ حيث

$f(x,y,z) = \frac{\sin xyz}{x^2+y^2+z^2}$ في النقطة $(0,0,0)$ ، ثم بيّن فيما إذا كانت الدالة f مستمرة في تلك النقطة .

السؤال الرابع : (17 علامة)

عرّف التطبيق المستمر بانتظام بين فضائين متريين ، ثم اثبت أنه إذا كان $(V, \|.\|)$ فضاءً منظماً فإن التطبيق

$f: V \to V \; ; \; f(x) = a_0 x \; ; x \in V \; ; \; a_0 \in \mathbb{R}$ مستمر بانتظام .

السؤال الخامس : (18 علامة)

أثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \; ; \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; ; \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال السادس : (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $I = \iint_A (x+y)\, dx\, dy$ حيث السطح A محدود بالدائرتين

$x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ ومحور السينات حيث $y \geq 0$.

حمص في 4 / 7 / 2016   د . عصام نميم

سلم تصحيح مقرر تحليل (٤)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٦

١ :

السؤال الأول: 18

لتكن (E,d) فضاء متريا و (x_n) متتالية في E. نقول عن (x_n) إنها متتالية كوشي، إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε، بحيث إذا كان $p \geq N_\varepsilon$ و $q \geq N_\varepsilon$ فإن: $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ (6)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة في الفضاء المتري (E, d) من النقطة a عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث (6) إذا كان $p \geq N_\varepsilon$ و $q \geq N_\varepsilon$ فإن: $d(x_p, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

وبالتالي:

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن (x_n) هي متتالية كوشي. (6)

السؤال الثاني: 17

بفرض أن $\lim_{x \to a} f(x) = p$ و $\lim_{x \to a} g(x) = q$ عندئذ إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً ما فإنه:

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A , d(x,a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$ (6)

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in B , d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي:

$$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A \cap B , d(x,a) < \delta \Rightarrow$$ (6)

$$|f(x) + g(x) - (p+q)| \leq |f(x) - p| + |g(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = P+q$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$ (5)

السؤال الثالث: 15

إذا أخذنا المتتاليتين (x_n, y_n, z_n) و (x'_n, y'_n, z'_n) بحيث أن:

$$(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,0)$$

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,0)$$ (5)

نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{3}$$ (5)

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{n^3}}{\frac{10}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$ فإننا نستنتج استناداً الى نتيجة معروفة أن (4)

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ غير موجودة وبالتالي (1)

الدالة غير مستمرة في النقطة $(0,0,0)$.

السؤال الرابع: 17

ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من E وبأخذ قيمه في F، نقول عن f أنه مستمر بانتظام على D، إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين في D يحققان $d_E(x,y)<\delta$ فإن $d_F(f(x),f(y))<\varepsilon$ (5)

فيقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي (6) $\delta = \frac{\varepsilon}{|a_0|}$ بحيث إذا كان

x, y أي عنصرين من V يحققان $d(x,y) = \|x-y\| < \delta$ فإن:

$$d(a_0 x, a_0 y) = \|a_0 x - a_0 y\| = |a_0| \cdot \|x-y\| < |a_0| \delta = \varepsilon \quad (6)$$

أي أن التطبيق مستمر بانتظام

السؤال الخامس: 18

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

بالتعويض في المساواة:

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \quad (6)$$

$$h\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 = h + 0 + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow$$

$$\eta(h,k) = \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

وبما أن

$$\lim_{h \to 0} \eta(h,h) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad (6)$$

فإنه لا يمكن للدالة η أن تتقارب من الصفر عندما $(h,k) \to (0,0)$

وبالتالي فإن f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال السادس: 15

بالانتقال الى الاحداثيات القطبية يكون

$y = \rho\sin\theta \qquad x = \rho\cos\theta \qquad J = \rho$

بالتعويض نجد: (5)

$$I = \iint_{A'} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)\, d\rho$$

(5)

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \left[\frac{\rho^3}{3}(\cos\theta + \sin\theta)\right]_1^2 = \frac{7}{3}\int_0^{\pi}(\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$$

(5)

$$= \frac{7}{3}\left[\sin\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{7}{3}\left[(0+1) - (0-1)\right] = \frac{14}{3}$$

د. عصام نيم